

## Interrogation rapide n° 5

1 heure

Calculatrice interdite

	Cours	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	BONUS
Total	5	5	3	3	4	2

### I Questions de cours

1. Compléter la propriété suivante :

#### Propriété 1

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels avec  $a \neq 0$ .

(a)  $\text{PGCD}(a; 0) =$

(b)  $\dots$

(c)  $\dots$

2. Démontrer le théorème : « Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels, avec  $b$  non nul.

Si  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$  alors  $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$ . »

### II Exercices

#### Exercice 1

1. Déterminer :

(a)  $\text{PGCD}(0; 18\,625)$

(b)  $\text{PGCD}(12\,465; 5)$

(c)  $\text{PGCD}(3\,025; 75)$

2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que les nombres 1 234 et 567 sont premiers entre eux.
3. Un pâtissier dispose de 355 croissants et 284 chocolatinnes. Il souhaite effectuer un maximum de sachets de viennoiseries sans qu'il n'y ait de reste.

Combien de paquets ce pâtissier peut-il réaliser ? Combien de croissants et de chocolatinnes comptera chaque sachet ?

#### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

Si on divise 1081 et 473 par un même entier positif  $n$ , on obtient respectivement 10 et 11 comme restes. Quel est cet entier ?

### Exercice 3

Soit  $n$  un entier naturel. Trouvez le PGCD de  $3n + 1$  et  $2n + 1$ .

### Exercice 4

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 12$ ,  $u_1 = 30$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

1. Donner les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$ .  
Que peut-on conjecturer pour la suite  $(v_n)$  ?
3. On admet que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{N}$  (ceci se démontrerait facilement à l'aide d'un raisonnement par récurrence).

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , la proposition

$$P(n) : \ll u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ sont des entiers et } \text{PGCD}(u_{n+1}, u_n) = \text{PGCD}(u_1, u_0) \gg$$

est vraie

4. Conclure.

### BONUS

Calculer  $\text{PGCD}(3^{123} - 5 ; 25)$